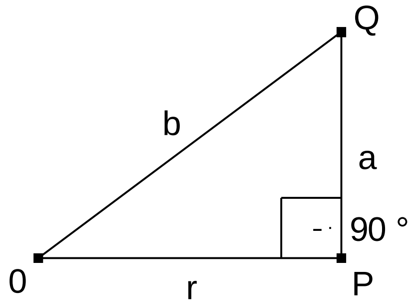
Ein Zirkel für die Kreisinversion

Es wird ein rechtwinkliges Dreieck OPQ mit den Katheten $r := \overline{OP}$ und $a := \overline{PQ}$ betrachtet. Die Hypotenuse $b := \overline{OQ}$ hat dann die Länge

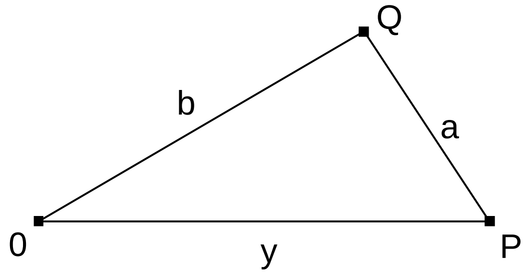
$$b = \sqrt{a^2 + r^2}\ .$$



Die Grundlinie $\overline{OP}$ wird unter Beibehaltung der Längen a und b verlängert, so dass

$$\overline{OP} := y > r$$

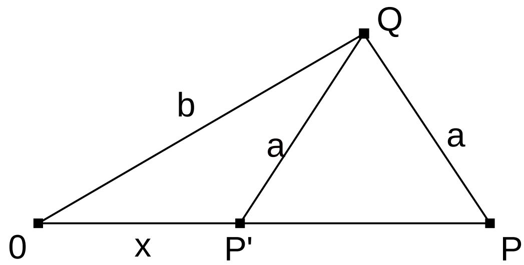
gilt.



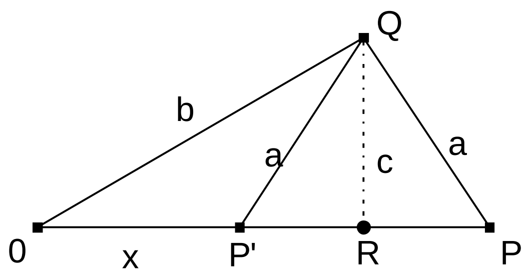
Nun kann man in das Dreieck OPQ ein gleichschenkliges Dreieck P'PQ mit

$$a = \overline{PQ} = \overline{P'Q}$$

einzeichnen.



Ferner werden $c := \overline{RQ}$ (Höhe der Dreiecke OPQ bzw. P'PQ) und $x := \overline{OP'}$ festgelegt.



Nach PYTHAGORAS kann c zweimal berechnet werden:

$$c^2 = \left(\sqrt{a^2 + r^2}\right)^2 - \overline{OR}^2 = a^2 - \overline{RP}^2 .$$

$\overline{OR}$ ist der Mittelwert von x und y:

$$\overline{OR} = \tfrac{1}{2} \cdot (x + y) ;$$

für $\overline{RP}$ gilt:

$$\overline{RP} = \tfrac{1}{2} \cdot (y - x) .$$

Damit erhält man

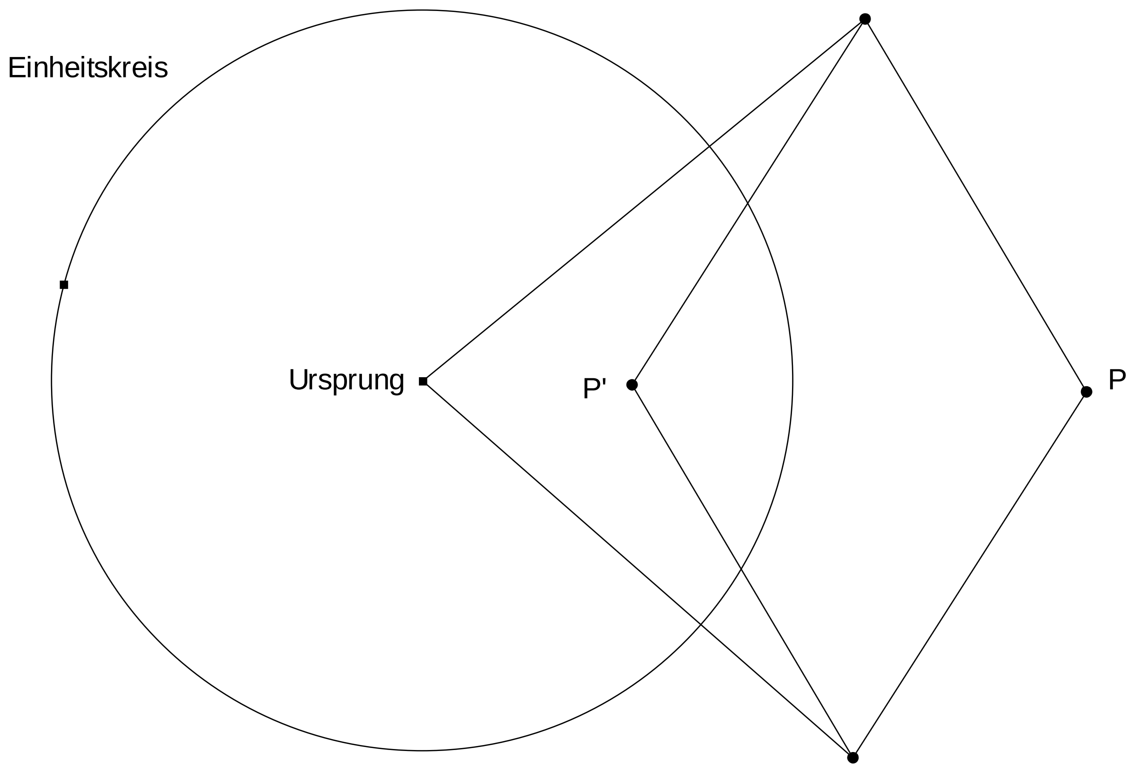
$$a^2 + r^2 - \tfrac{1}{4} \cdot (x + y)^2 = a^2 - \tfrac{1}{4} \cdot (y - x)^2 ,$$

$$r^2 - \tfrac{1}{4} \cdot \left(x^2 + y^2 + 2xy\right) = -\tfrac{1}{4} \cdot \left(y^2 + x^2 - 2xy\right),$$

und schließlich

$$r^2 = xy .$$

Dies ist aber genau die Bedingung für die Spiegelung am Kreis um den Ursprung mit Radius r. Als Folge (Spiegelung an der Grundlinie $\overline{OP}$) lässt sich der abgebildete Zirkel aus 6 Stangen, die in allen gemeinsamen Punkten beweglich montiert sind, konstruieren. Wird P einer Figur außerhalb des (Einheits-)Kreises nachgeführt, wobei der Ursprung (O) fest bleibt, so bewegt sich P' auf der zugehörigen Bildfigur.



Der Zusammenhang zwischen den Stangenlängen a und b, und dem Kreisradius r ist, wie in der ersten Abbildung gezeigt, durch $b = \sqrt{a^2 + r^2}$ gegeben.

<u>Literatur:</u>
Die mechanische Konstruktion ohne Beweis ist in dem Buch

Glaeser: Geometrie und ihre Anwendungen, Elsevier, München 2005, S. 30

zu finden.